6. Algebraické zväzy, voľné súčiny

1. Nech a je kompaktný prvok algebraického zväzu L. Dokážte:

(i) Pre každé $x \in L$, $a \not\leq x$ má množina
$$\{y \in L \mid a \not\leq y,\ x \leq y\}$$
maximálny prvok.

(ii) Tento maximálny prvok z je úplne $\wedge$-ireducibilný ($z = \inf X$ implikuje $z \in X$).

2. Použitím predošlého cvičenia ukážte, že v algebraickom zväze je každý prvok priesekom úplne $\wedge$-ireducibilných.

3. Dokážte, že súčin algebraických zväzov je algebraický. (Návod: uvažujte modelový príklad: $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je súčinom nekonečného počtu 2-prvkových zväzov.)

4. Na príklade ukážte, že homomorfný obraz algebraického zväzu nemusí byť algebraický.

5. Dokážte, že algebraický zväz L je distributívny práve vtedy, keď polozväz L_c jeho kompaktných prvkov je distributívny v nasledujúcom zmysle: Ak pre $a, b, c \in L_c$ platí $a \leq b \vee c$, tak existujú $x, y \in L_c$ také, že $x \leq b$, $y \leq c$, $a = x \vee y$.

6. Zostrojte voľný súčin dvoch 2-prvkových zväzov vo variete distributívnych zväzov.

7. Dokážte, že voľný súčin dvoch reťazcov vo variete $\mathcal{M}_3$ je distributívny.