# 5. Úplnosť

1. Dokážte, že pre každú podmnožinu $A$ usporiadanej množiny $P$ platí $U(L(U(A)) = U(A)$, $L(U(L(A)) = L(A)$.

2. V Booleovom zväze $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ (konečné podmnožiny $\mathbb{N}$ a ich doplnky) nájdite množinu, ktorá nemá supremum.

3. Popíšte MacNeillovo zúplnenie pre usporiadanú množinu všetkých podmnožín množiny $\{a, b, c, d\}$ s 1 a 3 prvkami.

4. Popíšte MacNeillovo zúplnenie pre Booleov zväz $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$.

5. Popíšte MacNeillovo zúplnenie pre $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$.

6. Popíšte ideálové zúplnenie pre $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < 1\}$ a dokážte, že nie je izomorfné s MacNeillovým.

7. Dokážte, že ideálové zúplnenie modulárneho zväzu je modulárny zväz.

8. Dokážte, že ideálové zúplnenie $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ nie je Booleov zväz.

9. (Netýka sa úplnosti.) Nech $B$ je Booleov zväz. Definujme $x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y)$ (symetrický rozdiel), $x \cdot y = x \wedge y$. Dokážte, že $B$ s operáciami $+$ a $\cdot$ je okruh. Je možné opačným postupom urobiť z okruhu Booleov zväz?