4. Birkhoffova dualita

1. Dokážte, že pre každé 2 konečné zväzy K, L platí

$$\mathrm{J}(K \times L) \cong \mathrm{J}(K) + \mathrm{J}(L).$$

2. Nech $\mathrm{M}(L)$ označuje množinu všetkých $\wedge$-ireducibilných prvkov zväzu L. (Definované sú analogicky ako $\vee$-ireducibilné prvky.) Dokážte, že pre každý konečný distributívny zväz L sú usporiadané množiny $\mathrm{M}(L)$ a $\mathrm{J}(L)$ izomorfné.

3. Nech P je čiastočne usporiadaná množina. Dokážte, že usporiadané množiny $\mathcal{O}(P^{op})$, $\mathcal{O}(P)^{op}$ a $\mathbf{2}^P$ izomorfné. (P^{op} označuje P s "obráteným" usporiadaním, $\mathbf{2}$ je 2-prvkový reťazec.)

4. Nakreslite $\mathcal{O}(P)$, keď P je súčin dvoch 3-prvkových reťazcov.

5. Zistite počet prvkov zväzu $\mathcal{O}(P)$, kde P je 4-rozmerná kocka bez najmenšieho a najväčšieho prvku.

6. Dokážte, že konečný distributívny zväz L je komplementárny práve vtedy, keď $\mathrm{J}(L)$ je antireťazec.

7. Nech K a L sú konečné distributívne zväzy. Dokážte, že
   (i) množina K^L všetkých $0, 1$-zachovávajúcich homomorfizmov $L \to K$ je zase distributívny zväz;
   (ii) $\mathrm{J}(K^L) \cong \mathrm{J}(K) \times L$.