# Matematika na Rubikovej kocke

Miroslav Ploščica

PF UPJŠ, Košice

May 21, 2013

# História

Vynálezca: maďarský priemyslový návrhár E. Rubik
Vrchol popularity: 80. roky (majstrovstvá sveta, rekordy...)
Podobné hlavolamy: iné mnohosteny, guľa, uši, veža, 15-ka....
(niektoré staršie ako RK)

# Čo chceme dosiahnuť

Matematický rozbor hlavolamu môže

- popísať dosiahnuteľné (regulárne) pozície;
- pre nedosiahnuteľné pozície dokázať neriešiteľnosť;
- pre dosiahnuteľné pozície nájsť algoritmus riešenia.

# Permutácie

RK sa skladá z 27 malých kociek:

- 1 vnútorná neviditeľná (v skutočnosti je tam namiesto nej otáčací mechanizmus);
- 6 stenových (pri otáčaní nemenia polohu, len orientáciu);
- 12 hranových;
- 8 vrcholových;

Každá pozícia (dosiahnuteľná či nedosiahnuteľná) určuje nejakú permutáciu na množine 12 hranových a 8 vrcholových kociek. (Orientáciu predbežne zanedbáme.)

# Permutácie

Príklad:

$$\left(\begin{matrix} rb & rg & rw & ry & bg & gw & wy & yb & ob & oy & ow & og \\ rg & rw & ry & rb & bg & gw & wy & yb & ob & oy & ow & og \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} rby & rbg & rgw & rwy & oby & oyw & owg & ogb \\ rbg & rgw & rwy & rby & oby & oyw & owg & ogb \end{matrix}\right)$$

# Permutácie všeobecne

*Permutácia* na množine $A$ je bijektívna funkcia $A \to A$. Napríklad

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

je funkcia, ktorá zobrazuje $1$ do $2$, $2$ do $3$, $3$ do $6$, atď.

*Transpozícia* je špeciálna permutácia, ktorá dva prvky vymení a ostatné nechá na mieste. Skladaním transpozícii (t.j. postupným robením 2-výmen) možno dosiahnuť akúkoľvek permutáciu.
Permutácia je *párna*, ak je zložením párneho počtu transpozícií.
Napríklad horeuvedená permutácia je párna, lebo

$$123456 \to 213456 \to 231456 \to 236451 \to 236541$$

sú $4$ výmeny.
Netriviálny matematický fakt: každá permutácia je jednoznačne párna alebo nepárna (t.j. tú istú permutáciu nemožno súčasne dosiahnuť párnym aj nepárnym počtom výmen).

# Pravidlá skladania

Zloženie

- dvoch párnych permutácií je párna;
- dvoch nepárnych permutácií je párna;
- párnej a nepárnej permutácie je nepárna.

# Permutácie na RK

Fakt: *Otočenie jednej steny na RK je párna permutácia*.

Dôsledok: *Každá dosiahnuteľná pozícia (permutácia) na RK je párna*

Dôsledok: *nepárne pozície sú neriešiteľné*.

# Trojcykly

*Trojcyklus* je permutácia, ktorá cyklicky zamení 3 prvky a ostatné nechá na mieste.
**Tvrdenie:** Každá párna permutácia je zložením trojcyklov.
**Fakt:** Na RK možno urobiť 3-cyklus na hranových aj na vrcholových kockách.
**Dôsledok:** Každá párna permutácia na RK je riešiteľná. (Keď neberieme do úvahy orientáciu.)

# Orientácia - hranové kocky

Potrebujeme definovať "správnu" a "nesprávnu" orientáciu aj pre kocky, ktoré nie sú na svojom mieste. Urobíme to nasledovne. Vyberieme si jednu dvojicu protiľahlých stien a nazveme ich dominantné. Ďalšia dvojica protiľahlých stien bude recesívna, a zvyšné 2 steny budú neutrálne. Hranová kocka bude správne orientovaná, ak

- ak kocka s dominantnou (recesívnou) plôškou leží v dominantnej (recesívnej) stene, musí v nej byť touto plôškou;
- dominantná plôška neleží v recesívnej stene a naopak.

.

# Orientácia - hranové kocky

Fakty:

1. Otočenie dominantnej alebo recesívnej steny nemení orientáciu žiadnej hranovej kocky.
2. Otočenie neutrálnej steny zmení orientáciu všetkých 4 v nej ležiacich hranových kociek.
3. V základnej pozícii sú všetky kocky orientované správne.

Dôsledok: V každej riešiteľnej pozícii je počet nesprávne orientovaných kociek párny.

# Orientácia - rohové kocky

Rohová kocka má 3 možné orientácie, z ktorých iba 1 je "správna". Ako to vyhodnotiť?
Zvolíme si dve protiľahlé steny za dominantné. Takto má každá rohová kocka presne jednu dominantnú plôšku. Povieme, že kocka je správne orientovaná, ak jej dominantná plôška leží v dominantnej stene. Ďalšie dve orientácie sú nesprávne. Aby sme ich rozlíšili, priradíme im číselné hodnoty takto:

- Ak je kocka od správnej polohy vychýlená o $120^\circ$ proti smeru hodinových ručičiek (pri pohľade spredu), povieme, že má orientáciu $1$.
- Ak je kocka od správnej polohy vychýlená o $120^\circ$ po smere hodinových ručičiek, povieme, že má orientáciu $2$.

(Správne orientovaná kocka má orientáciu $0$.)

# Orientácia - rohové kocky

Každému stavu kocky priradíme rohové orientačné číslo (ROČ): súčet orientácií všetkých rohových kociek. V základnej polohe je ROČ$= 0$. A teraz:

- Otočenie okolo dominantnej steny orientácie rohových kociek nemení.
- Otočenie okolo nedominantnej steny otočí 2 rohové kocky proti smeru hodinových ručičiek (schéma $0 \to 1 \to 2 \to 0$), a ďalšie 2 opačne (schéma $0 \to 2 \to 1 \to 0$). Čo to urobí s ROČ?

# Orientácia - rohové kocky

**Tvrdenie:** *Otočenie o* $90^\circ$ *okolo nedominantnej steny zmení ROČ o násobok 3.*
Tvrdenie sa dá dokázať preverením všetkých možností, ale elegantnejšie je použiť tzv. sčítanie modulo $3$:

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

Pri takomto sčítaní sa k orientáciám dvoch kociek pripočíta $1$, od ďalších dvoch sa $1$ odpočíta. Celková zmena bude $0$, čo zodpovedá násobku $3$.

# Orientácia - zhrnutie

**Dôsledok:** Riešiteľná pozícia musí mať ROČ deliteľné $3$.
Podobne, pri hranových kockách sme mohli použiť sčítanie mod $2$.
Správne orientovanej hranovej kocke priradíme orientáciu $0$, nesprávne $1$. Hranové orientačné číslo (HOČ) bude súčet orientácií všetkých hranových kociek.
**Dôsledok:** Riešiteľná pozícia musí mať HOČ deliteľné $2$.

# Ako zložiť kocku

Predpokladajme, že kocka je v riešiteľnej pozícii. Použitím 3-cyklov docielime, že každá kocka je na svojom mieste. Treba ešte "opraviť" orientácie. To sa dá, pretože

- existuje postup, ktorý zmení orientácie dvoch hranových kociek (a nezmení nič iné);
- existuje postup, ktorý otočí dve rohové kocky v opačných smeroch ( a nezmení nič iné).

# Počet riešiteľných pozícií

Počet všetkých pozícií je

$$12! \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 3^{8}.$$

($12!$ permutácií hranových kociek, $8!$ permutácií vrcholových kociek, $2^{12}$ orientácií hranových kociek, $3^{8}$ orientácií vrcholových kociek)
Z týchto pozícií má presne polovica párnu polohovú permutáciu. Z tejto polovice má polovica aj správne HOČ a tretina správne ROČ.
Takže počet riešiteľných pozícií je

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 12! \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 3^{8} = 43\ 252\ 003\ 274\ 489\ 856\ 000.$$

# Ako navrhnúť ťažší hlavolam

Všetky známe permutačné hlavolamy sa vyznačuju tým, že sa na nich dajú vhodnými ťahmi dosiahnuť transpozície alebo trojcykly - to umožňuje nájsť pomerne jednoduchý algoritmus riešenia.
Ťažší hlavolam by mal byť založený na permutačnej *grupe* (= množine permutácií uzavretej na skladanie), ktorá by

- neobsahovala žiadnu transpozíciu ani trojcyklus;
- bola dostatočne bohatá.

Nájsť také grupy nie je jednoduché, ale existujú.

Patria do nej všetky permutácie na množine $\{1, 2, 3 \ldots, 12\}$, ktoré vieme získať skladaním nasledujúcich troch permutácií.

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 2 & 7 & 10 & 6 & 4 & 11 & 3 & 9 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 6 & 8 & 9 & 3 & 10 & 4 & 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Má 95040 prvkov.)