SYMETRICKÉ POLYNÓMY

Polynóm $f(x_1, \ldots, x_n)$ premenných $x_1, dots, x_n$ sa nazýva *symetrický*, ak sa nezmení pri žiadnej permutácii premenných.

Dôležitým príkladom symetrických polynómov sú nasledujúce, tzv. *základné* symetrické polynómy:

$$\sigma_{1,n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n;$$

$$\sigma_{2,n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n;$$

$$\cdots$$

$$\sigma_{n,n}(x_1, \ldots, x_n) = x_1x_2 + \ldots x_n.$$

Všeobecne,

$$\sigma_{k,n} = \Sigma_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}.$$

(Pokiaľ bude počet premenných zrejmý, tak budeme písať zjednodušene σ_k.

Existujú samozrejme aj symetrické polynómy, ktoré nie sú základné, napríklad $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

Dôležitosť základných symetrických polynómov spočíva v dvoch faktoch.

Veta 1.

$$(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = x_n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n$$

To znamená, že koeficienty polynómu s koreňmi $x_1, \dots, x_n$ sa až na znamienko rovnajú hodnotám základných symetrických polynómov v týchto koreňoch. Vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi polynómov sa nazývajú *Vietove vzťahy*.

Druhý z týchto faktov je obsiahnutý v nasledujúcej vete.

Veta 2. *Každý symetrický polynóm s koeficientmi v poli F sa dá vyjadriť pomocou základných symetrických polynómov použitím operácií $+$, $\cdot$ a konštánt z F.*

Vyjadrenie o ktorom hovorí Veta 2 sa prakticky hľadá metódou neurčitých koeficientov. Ukážeme ju na príklade. Nech

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3.$$

Polynóm f má stupeň 3. Každý základný symetrický polynóm σ_k má stupeň k. Pretože pri násobení polynómov sa stupne sčítajú, hľadané vyjadrenie musí mať tvar

$$f = a\sigma_1^3 + b\sigma_1\sigma_2 + c\sigma_3$$

a našou úlohou je len určiť hodnoty konštánt a, b, c.

Dosaďme do tejto rovnosti hodnoty $x_1 = 1$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$. Potom $f = 1$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0$ a dostávame rovnicu $a = 1$.

Dosaďme do tejto rovnosti hodnoty $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = \cdots = x_n = 0$. Potom $f = 2$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = 0$ a dostávame rovnicu $2 = a \cdot 2^3 + b \cdot 2$, z ktorej (keďže $a = 1$) vyplýva $b = -3$.

Dosaďme do tejto rovnosti hodnoty $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = \cdots = x_n = 0$. Potom $f = 3$, $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 3$, $\sigma_3 = 1$ a dostávame rovnicu $3 = a \cdot 27 + b \cdot 9 + c \cdot 1$, odkiaľ vyplýva $c = 3$. Teda

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Kontrolný test

Začiatok testu (5 bodov) :

1. Označte pravdivé výroky:

☐ Polynóm je symetrický práve vtedy, keď sa nezmení pri žiadnej transpozícii (výmene) dvoch premenných.

- [ ] Ak je polynóm je symetrický, tak každý jeho člen má rovnaký stupeň.
- [ ] Každý symetrický polynóm je súčtom základných.
- [ ] Súčet dvoch nesymetrických polynómov môže byť symetrický.

2. Označte symetrické polynómy:

- [ ] $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1;$
- [ ] $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2;$
- [ ] $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)(5 - x_1 - x_2);$
- [ ] $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3);$
- [ ] $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3).$

3. Polynóm jednej premennej

- [ ] je vždy symetrický;

- [ ] nie je nikdy symetrický;
- [ ] môže a nemusí byť symetrický.

4. Súčet a súčin dvoch symetrických polynómov
- [ ] je vždy symetrický;
- [ ] nie je nikdy symetrický;
- [ ] môže a nemusí byť symetrický.

5. Vietove vzťahy sú vzťahy
- [ ] medzi základnými symetrickými polynómami rôznych stupňov;
- [ ] medzi koreňmi a koeficientmi polynómov;
- [ ] medzi symetrickými a nesymetrickými polynómami.

Koniec testu   Správne odpovede

Získané body:

Úspešnosť: