KVADRATICKÉ FORMY

Kvadratická forma nad poľom F je polynóm tvaru

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Sigma_{i \leq j} b_{ij} x_i x_j,$$

kde $b_{ij} \in F$.

Takáto kvadratická forma sa dá prepísať na symetrický tvar

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Sigma_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

kde $a_{ij} = a_{ji}$ pre každé i, j. K tomu stačí položiť

$$a_{ij} = \begin{cases} b_{ij}/2 & \text{ak } i < j \\ b_{ij} & \text{ak } i = j \\ b_{ji}/2 & \text{ak } i > j. \end{cases}$$

Ekvivalentnosť týchto dvoch tvarov znamená, že obe formy určujú tú istú funkciu $F^n \to F$.

Kvadratickú formu možno úsporne zapí sať tiež v maticovej podobe

$$f = XAX^T,$$

kde $X = (x_1, \ldots, x_n)$ je vektor premenných a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

je (symetrická) matica koeficientov.

Kvôli aplikáciám v matematickej analýze a v geometrii sa zaoberáme vyšetrovaním kanonického tvaru kvadratických foriem vzhľadom ku zmene bázy (ekvivalentne: vzhľadom ku regulárnym lineárnym transformáciám). To znamená, že uvažujeme lineárne substitúcie tvaru

$$X = YP,$$

kde P je nejaká regulárna matica $n \times n$. V transponovanej podobe má substitúcia tvar $X^T = P^T Y^T$, a teda dostaneme formu s premennými $y_1, \ldots, y_n$ v tvare

$$f = Y(PAP^T)Y^T,$$

to jest formu s maticou $C = PAP^T$. Maticiam A a C, medzi ktorými je tento vzťah, hovoríme, že sú navzájom *kongruentné*.

Veta 1. *Nech F je pole v ktorom $1 + 1 \neq 0$. Potom každú kvadratickú* *formu nad F možno vhodnou lineárnou substitúciou priviesť na diagonálny tvar*

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_r y_r^2,$$

kde $d_1, \ldots, d_r \in F$. Číslo r je invariantom formy (nezávisí od spôsobu úpravy) a nazýva sa hodnosť.

Dôležitý je prípad $F = \mathbb{R}$.

Veta 2. (Sylvestrov zákon zotrvačnosti) *Každú kvadratickú formu nad $\mathbb{R}$ možno vhodnou lineárnou substitúciou priviesť na diagonálny tvar*

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \ldots - y_r^2.$$

Čísla p a r sú invariantmi formy.

Kvadratická forma $f(x_1, \ldots, x_n)$ nad $\mathbb{R}$ sa nazýva

- *pozitívne definitná*, ak $f(x_1, \ldots, x_n) > 0$ pre všetky $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$;
- *pozitívne semidefinitná*, ak $f(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ pre všetky $x_1, \ldots, x_n$;

- *negatívne definitná*, ak $f(x_1, \dots, x_n) < 0$ pre všetky $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$;
- *negatívne semidefinitná*, ak $f(x_1, \dots, x_n) \leq 0$ pre všetky $x_1, \dots, x_n$;
- *indefinitná*, ak $f(x_1, \dots, x_n) > 0$ a $f(y_1, \dots, y_n) < 0$ pre nejaké $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

Definitnosť foriem sa využíva napríklad v matematickej analýze pri vyšetrovaní extrémov funkcií viacerých premenných. Definitnosť sa nemení pri lineárnych substitúciách, preto ju možno zistiť prevodom na diagonálny tvar.

Kontrolný test

Začiatok testu (6 bodov) :

1. Kvadratická forma n premenných má hodnosť

☐ maximálne n;

☐ minimálne n;

- [ ] presne n;
- [ ] nekonečnú.

2. Označte pravdivé výroky

- [ ] Kongruentné matice majú rovnaké prvky;
- [ ] Kongruentné matice majú rovnaké rozmery;
- [ ] Kongruentné matice majú rovnakú hodnosť;
- [ ] Kongruentné matice majú rovnaký determinant.

3. Forma $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2$ je

- [ ] pozitívne definitná;
- [ ] pozitívne semidefinitná;
- [ ] negatívne definitná;

- [ ] negatívne semidefinitná;
- [ ] indefinitná.

4. Forma $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ je

- [ ] pozitívne definitná;
- [ ] pozitívne semidefinitná;
- [ ] negatívne definitná;
- [ ] negatívne semidefinitná;
- [ ] indefinitná.

5. Forma $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ je

- [ ] pozitívne definitná;
- [ ] pozitívne semidefinitná;

☐ negatívne definitná;

☐ negatívne semidefinitná;

☐ indefinitná.

6. Označte pravdivé výroky

☐ Nad poľom $\mathbb{C}$ má forma $f(x_1, \dots, x_n)$ vždy hodnosť n;

☐ Každú formu nad každým poľom možno upraviť na diagonálny tvar;

☐ Pozitívna definitnosť je definovaná len pre formy nad $\mathbb{R}$;

☐ Každé dve matice s rovnakou hodnosťou a rozmerom sú kongruentné;

☐ Nenulová forma nemôže byť súčasne pozitívne aj negatívne semidefinitná.

Koniec testu   Správne odpovede

Získané body:

Úspešnosť: