KORENE POLYNÓMOV

Prvok $c \in F$ sa nazýva koreňom polynómu

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

nad F ak $f(c) = a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + \cdots + a_n c^n = 0$.

Veta 1. *Prvok c je koreňom polynómu $f(x)$ práve vtedy, keď polynóm $f(x)$ je deliteľný $x - c$*

Na rýchle a prehľadné delenie polynómu f polynómom $x - c$ používame mnemotechnickú pomôcku, ktorá sa nazýva *Hornerova schéma.*

Hovoríme, že c je (presne) k-násobným koreňom polynómu $f(x)$, ak $f(x)$ je deliteľné $(x-c)^k$ a nie je deliteľné $(x-c)^{k+1}$.

Veta 2. *Polynóm stupňa n môže mať najviac n koreňov.*

Existencia koreňov vo všeobecnosti nie je zaručená. Nad poľom komplexných čísel však platí:

Základná veta algebry: *Každý polynóm nad poľom $\mathbb{C}$ komplexných čísel stupňa aspoň 1 má v $\mathbb{C}$ koreň.*

Zložitosť hľadania koreňov závisí hlavne od stupňa:

- lineárne polynómy - elementárne;
- kvadratické polynómy - doplnenie na štvorec;
- polynómy vyšších stupňov - približné numerické metódy.

Existujú ale špeciálne prípady, keď vieme nájsť presné hodnoty koreňov aj pre polynómy vyšších stupňov.

Korene polynómu nad konečným poľom (napr. $\mathbb{Z}_n$), vrátane ich násobnosti, možno nájsť vyskúšaním všetkých možností (najlepšie použitím Hornerovej schémy).

Veta 3. *Nech $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi. Ak racionálne číslo $\frac{p}{q}$, kde p a q sú nesúdeliteľné, je jeho koreňom, tak p delí a_0, q delí a_n.*

Binomické polynómy: Nech $f(x) = x^n - a$, kde a je komplexné číslo, ktoré má goniometrický tvar

$$a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Potom korene f sú

$$x_k = \sqrt[n]{|a|}(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}),$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$.

Pre hľadanie viacnásobných koreňov je užitočná nasledujúca veta.

Veta 4. *Nech c je n-násobný koreň polynómu f nad poľom F, pričom v F platí $n \neq 0$. Potom c je $(n-1)$-násobným koreňom derivácie f'.*

Preto každý viacnásobný koreň polynómu f je aj koreňom $d = NSD(f, f')$, a pritom d môže mať v porovnaní s f najviac polovičný stupeň.

Kontrolný test

Začiatok testu (6 bodov) :

1. Polynóm stupňa 11 môže mať maximálne

- [ ] 0 trojnásobných koreňov
- [ ] 3 trojnásobné korene
- [ ] 8 trojnásobných koreňov
- [ ] 11 trojnásobných koreňov

2. Polynóm, ktorý má n rôznych koreňov má stupeň

- [ ] najviac n
- [ ] presne n
- [ ] aspoň n

3. Hornerova schéma slúži na

- [ ] rýchle delenie polynómom prvého stupňa;
- [ ] hľadanie komplexných koreňov;

- [ ] výpočet NSD polynómov.

4. Ak $\frac{p}{q}$ je koreňom polynómu $2x^4 + ax^3 + bx - 5$, tak

- [ ] $p|2$, $q|5$;
- [ ] $2|p$, $5|q$;
- [ ] $p|5$, $q|2$;
- [ ] $5|p$ $2|q$;

5. Označte pravdivé výroky:

- [ ] Každý nenulový polynóm má konečne veľa koreňov.
- [ ] Nad poľom $\mathbb{C}$ má každý polynóm koreň.
- [ ] Polynóm stupňa 1 má koreň nad každým poľom.
- [ ] Polynóm stupňa aspoň 1 nad $\mathbb{R}$ má v $\mathbb{R}$ koreň.

6. Binomický polynóm môže mať v $\mathbb{R}$

- ☐ najviac 1 koreň;
- ☐ najviac 2 korene;
- ☐ najviac 3 korene;
- ☐ ľubovoľný počet koreňov.

Koniec testu

Správne odpovede

Získané body:

Úspešnosť: