POLYNÓMY A DELITEĽNOSŤ

Polynóm nad poľom F je výraz tvaru

$$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

kde x je grafický symbol (premenná), a $a_0, \ldots, a_n \in F$ (koeficienty).

Stupeň takého polynómu je maximálne k také, že $a_k \neq 0$. Stupeň polynómu f budeme označovať symbolom $st(f)$. Ak sú všetky a_k rovné 0, tak polynóm sa nazýva nulový a jeho stupeň nedefinujeme. Polynóm stupňa n, v ktorom $a_n = 1$, sa nazýva *normovaný*.

Označme $F[x]$ množinu všetkých polynómov premennej x nad poľom F. Pre každé $f, g, h \in F[x]$ platí:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. $f + 0 = x$; (0 označuje polynóm identicky rovný 0)
4. $f + (-f) = 0$;
5. $f(gh) = (fg)h$;

6. $f(g+h) = fg + fh$, $(g+h)f = gf + hf$;

7. $fg = gf$;

8. $1 \cdot f = f$; (1 označuje polynóm identicky rovný 1)

9. ak $xy = 0$ tak $x = 0$ alebo $y = 0$.

Splnenie podmienok (1)-(6) znamená, že $(F[x], +, \cdot)$ je *okruh*, podmienky (1)-(9) hovoria, že je to *obor integrity*.

Z horeuvedených podmienok sa dajú odvodiť aj ďalšie známe vlastnosti, napríklad $f \cdot 0 = 0$.

Definícia Nech $f, g \in F[x]$. Hovoríme, že f je deliteľné g (a píšeme $g|f$) ak existuje $h \in F[x]$ tak, že $f = gh$.

Vzťah $g|f$ opisujeme tiež slovnými spojeniami "g delí f", "g je deliteľom f", "f je násobkom g".

Ľahko sa dokážu nasledujúce vlastnosti relácie deliteľnosti:

1. $f|f$ pre každé f;

2. $1|f$ pre každé f;

3. $f|0$ pre každé f;
4. $0|f$ práve vtedy, keď $f = 0$;
5. ak $f|g$ a $g|h$, tak $f|h$;
6. ak $f|g$ a $f|h$, tak $f|(g+h)$;
7. ak $f|g$, tak $f|gh$ pre každé h;
8. ak $f|g$, tak $g = 0$ alebo $\mathrm{st}(f) \leq \mathrm{st}(g)$.

Podobne ako pre celé čísla máme *Vetu o delení so zvyškom.*

Veta 1 *Nech $f, g \in F[x]$, $g \neq 0$. Potom existujú $p, z \in F[x]$ tak, že*

$$f = gp + z$$

a $z = 0$ alebo $st(z) < st(g)$. Naviac, polynómy p a z sú určené jednoznačne.

Polynómy p a z v predošlej vete sa nazývajú *podiel* a *zvyšok*. Samozrejme, $z = 0$ práve vtedy, keď $g|f$.

Kontrolný test

Začiatok testu (6 bodov) :

1. Označte pravdivé výroky:

- [ ] Každý polynóm nad nekonečným poľom má nekonečne veľa deliteľov.
- [ ] Každý polynóm má nekonečne veľa násobkov
- [ ] Polynóm s väčším stupňom nemôže deliť polynóm s menším stupňom
- [ ] Nad vhodným poľom existuje polynóm, ktorý má presne 6 deliteľov

2. Súčet nenulových polynómov $f+g$ má stupeň

- [ ] rovný maximu zo stupňov polynómov f a g;
- [ ] rovný minimu zo stupňov polynómov f a g;
- [ ] menší alebo rovný maximu zo stupňov polynómov f a g;

- [ ] väčší alebo rovný minimu zo stupňov polynómov f a g.

3. Súčin nenulových polynómov fg má stupeň

- [ ] rovný maximu zo stupňov polynómov f a g;
- [ ] rovný minimu zo stupňov polynómov f a g;
- [ ] rovný súčtu stupňov polynómov f a g;
- [ ] rovný súčinu stupňov polynómov f a g;

4. Ak f delí súčin gh tak potom

- [ ] f musí deliť g aj h
- [ ] f musí deliť aspoň jeden z polynómov g, h
- [ ] f nemusí deliť ani jeden z polynómov g, h

5. Zvyšok po delení polynómu $x+2$ polynómom $3x+6$ je

- [ ] 0

- [ ] $\frac{1}{3}$
- [ ] $x+2$
- [ ] $2x+4$

6. Označte pravdivé výroky:

- [ ] Ak pre polynómy f, g, h platí $fg = fh$, tak $g = h$.
- [ ] Ak pre polynómy f, g platí $f^2 = g^2$, tak $f = g$.
- [ ] $f|1$ práve vtedy, keď stupeň f je 0.
- [ ] Ak pre polynómy f, g platí $f|g$ aj $g|f$, tak $f = g$.

Koniec testu | Správne odpovede

Získané body:

Úspešnosť: