CELÉ ČÍSLA A DELITEĽNOSŤ

Uvažujme množinu $\mathbb{Z}$ celých čísel s operáciami sčítania a násobenia. Pre každé $x, y, z \in \mathbb{Z}$ platí:

1. $x + y = y + x$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
3. $x + 0 = x$;
4. $x + (-x) = 0$;
5. $x(yz) = (xy)z$;
6. $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$;
7. $xy = yx$;
8. $1 \cdot x = x$;
9. ak $xy = 0$ tak $x = 0$ alebo $y = 0$.

Splnenie podmienok (1)-(6) znamená, že $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ je *okruh*, podmienky (1)-(9) hovoria, že je to *obor integrity.*

Z horeuvedených podmienok sa dajú odvodiť aj ďalšie známe vlastnosti, napríklad $x \cdot 0 = 0$.

Na množine $\mathbb{Z}$ máme aj prirodzené usporiadanie $\leq$, ktoré má nasledujúce vlastnosti (pre každé x, y, z).

1. $x \leq x$;
2. ak $x \leq y$ a $y \leq x$, tak $x = y$;
3. ak $x \leq y$ a $y \leq z$, tak $x \leq z$;
4. ak $x \leq y$, tak $x + z \leq y + z$;
5. ak $x \leq y$ a $z \geq 0$, tak $xz \leq yz$;

Ďalšia dôležitá vlastnosť sa nazýva *Princíp dobrého usporiadania*: Každá neprázdna, zdola ohraničená podmnožina množiny $\mathbb{Z}$ má najmenší prvok.

Význam uvedeného princípu spočíva hlavne v tom, že umožňuje robiť dôkazy *matematickou indukciou.*

Definícia. Nech a, b sú celé čísla. Hovoríme, že a je deliteľné b (a píšeme $b|a$) ak existuje $c \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = bc$.

Vzťah $b|a$ opisujeme tiež slovnými spojeniami "b delí a", "b je deliteľom a", "a je násobkom b".
Ľahko sa dokážu nasledujúce vlastnosti relácie deliteľnosti:

1. $a|a$ pre každé a;
2. $1|a$ pre každé a;
3. $a|0$ pre každé a;
4. $0|a$ práve vtedy, keď $a = 0$;
5. ak $a|b$ a $b|c$, tak $a|c$;
6. ak $a|b$ a $a|c$, tak $a|(b + c)$;
7. ak $a|b$, tak $a|bc$ pre každé c;
8. ak $a|b$, tak $b = 0$ alebo $|a| \leq |b|$.

Symboly $|a|, |b|$ v (8) znamenajú absolútnu hodnotu. Všimnime si, že podľa (4) číslo 0 *je* deliteľné 0. (A žiadne iné číslo nulou deliteľné nie je.)

Nasledujúce dôležité tvrdenie je známe ako *Veta o delení so zvyškom.*

Veta 1. *Nech $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Potom existujú $p, z \in \mathbb{Z}$ tak, že*

$$a = bp + z$$

a $0 \leq z < |b|$. Naviac, čísla p a z sú určené jednoznačne.

Čísla p a z v predošlej vete sa nazývajú *podiel* a *zvyšok*. Samozrejme, $z = 0$ práve vtedy, keď $b|a$.

Kontrolný test

Začiatok testu (6 bodov) :

1. Označte pravdivé výroky:

☐ Každé kladné celé číslo má aspoň dva delitele.

☐ Každé celé číslo má nekonečne veľa násobkov.

- ☐ Číslo s väčšou absolútnou hodnotou nemôže deliť číslo s menšou absolútnou hodnotou.
- ☐ Existuje číslo, ktoré má presne 5 deliteľov.
- ☐ Existuje číslo, ktoré má presne 6 deliteľov.

2. Číslo 100 má presne

- ☐ 6 deliteľov;
- ☐ 9 deliteľov;
- ☐ 18 deliteľov;
- ☐ iný počet deliteľov.

3. Ak a delí súčin bc tak potom

- ☐ a musí deliť b aj c;

- [ ] a musí deliť aspoň jedno z čísel b, c;
- [ ] a nemusí deliť ani jedno z čísel b, c.

4. Zvyšok po delení čísla (-5) číslom 3 je

- [ ] 1
- [ ] 2
- [ ] (-1)
- [ ] (-2)

5. Ak $0 < a < b$, tak

- [ ] Číslo a sa číslom b nedá deliť;
- [ ] Číslo a sa číslom b dá deliť a podiel je 0;
- [ ] Číslo a sa číslom b dá deliť a podiel je záporný.

6. Princíp dobrého usporiadania hovorí, že

- [ ] každé dve celé čísla sa dajú porovnať;
- [ ] ku každému celému číslu existuje od neho väčšie aj menšie;
- [ ] každá neprázdna zdola ohraničená množina celých čísel má najmenší prvok.

Koniec testu

Správne odpovede

Získané body:

Úspešnosť: