NAJVÄČŠÍ SPOLOČNÝ DELITEĽ

Symbolom $D(a)$ označme množinu všetkých deliteľov čísla a. Napríklad $D(6) = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Ďalej, nech $D(a, b)$ označuje množinu spoločných deliteľov čísel a, b, t.j. čísel, ktoré súčasne delia a aj b. Napríklad $D(6, 8) = \{1, -1, 2, -2\}$.

Definícia Číslo d sa nazýva najväčším spoločným deliteľom (NSD) čísel a, b ak

(i) $d \in D(a, b)$;

(ii) pre každé $x \in D(a, b)$ platí $x|d$.

Teda spoločné delitele neporovnávame reláciou $\leq$, ale reláciou $|$: najväčší spoločný deliteľ je taký, že je deliteľný všetkými ostatnými spoločnými deliteľmi. Dôsledkom toho je, že najväčšie spoločné delitele sú dva. Napríklad NSD čísel 6 a 8 sú čísla 2 ale aj -2. (Jediná výnimka je prípad $a = b = 0$, kedy jediný NSD je 0.)

Veta 1. *Pre každé dve celé čísla a, b existuje ich NSD. Ten je určený* *jednoznačne až na znamienko a dá sa vyjadriť v tvare* $d = au + bv$ *pre nejaké* $u, v \in \mathbb{Z}$.

Označenie: Nezáporný NSD čísel a a b budeme označovať (a, b).

V prípade, že $(a, b) = 1$ hovoríme, že a a b sú *nesúdeliteľné*.

Na výpočet NSD existuje dobre známa metóda, ktorá sa nazýva *Euklidov algoritmus*. Zakladá sa na nasledujúcom tvrdení.

Lema 2. *Ak* $a = bp + z$ $(a, b, p, z \in \mathbb{Z})$, *tak* $D(a, b) = D(b, z)$. *Následne, NSD čísel* a *a* b *je taký istý, ako NSD čísel* b *a* z.

Popis algoritmu: Predpokladajme, že $a \geq b$. Podľa Vety o delení so zvyškom nájdeme $p, z \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = bp + z$, kde $0 \leq z < |b|$. Ak $z = 0$, tak NSD je b. Ak $z \neq 0$, tak hľadáme NSD čísel b a z. Výpočet sa nakoniec musí skončiť, lebo zvyšky stále klesajú.

Poznámka: Euklidov algoritmus sa dá využiť aj na vyjadrenie NSD v tvare $d = au + bv$.

NSD môžeme definovať nielen pre dve čísla, ale pre ľubovoľný počet. Nech $D(a_1, \ldots, a_n)$ označuje množinu všetkých spoločných deliteľov čísel

a_1,..., a_n.

Definícia Číslo d sa nazýva najväčším spoločným deliteľom (NSD) čísel a_1,...,a_n ak

(i) $d \in D(a_1, \ldots, a_n)$;

(ii) pre každé $x \in D(a_1, \ldots, a_n)$ platí $x|d$.

Podobne ako v prípade dvoch čísel sa dá dokázať, že NSD vždy existuje a je určený jednoznačne až na znamienko. Na jeho výpočet môžeme využiť nasledujúce tvrdenie.

Lema 3. *Nech d je NSD čísel a_1,...,a_n. Nech e je NSD čísel d a a_{n+1}. Potom e je NSD čísel a_1,...,a_{n+1}.*

Na základe uvedenej lemy môžeme postupne vypočítať NSD 2 čísel, 3 čísel, 4 čísel, atď.

Definícia Číslo n sa nazýva najmenším spoločným násobkom (NSN) čísel a, b ak

(i) $a|n$, $b|n$;

(ii) pre každé x také, že $a|x$, $b|x$ platí $n|x$.

Na výpočet NSN nám slúži nasledujúce tvrdenie.

Veta 4 *Ak* $(a, b) \neq 0$, *tak číslo*

$$n = \frac{ab}{(a, b)}$$

je NSN čísel a *a* b*.*

Kontrolný test

Začiatok testu (7 bodov) :

1. Dve rôzne celé čísla

☐ majú vždy 1 NSD

- [ ] majú vždy 2 NSD
- [ ] môžu mať 1 alebo 2 NSD
- [ ] nemusia mať žiaden NSD

2. Ak $n > 0$, tak $(0, n)$ sa rovná

- [ ] vždy 0
- [ ] vždy n
- [ ] niekedy 0, niekedy n

3. Ak $n > 1$, tak $(1, n)$ sa rovná

- [ ] vždy 1
- [ ] vždy n
- [ ] niekedy 1, niekedy n

4. Ak $n \neq 2$, tak $(2, n)$ sa rovná

- ☐ vždy 1
- ☐ vždy 2
- ☐ niekedy 1, niekedy 2
- ☐ niekedy 2, niekedy n

5. Nech x je NSD čísel a, b, nech y je NSD čísel a, b, c. Potom

- ☐ x delí y
- ☐ y delí x
- ☐ x nemusí deliť y ani y nemusí deliť x

6. Nech x je NSD čísel a, b, nech y je NSN čísel a, b. Potom

- ☐ x delí y
- ☐ y delí x

☐ x nemusí deliť y ani y nemusí deliť x

7. Euklidov algoritmus slúži na

☐ rýchle delenie celých čiísel

☐ výpočet NSD dvoch celých čísel

☐ overenie existencie NSD

Koniec testu   Správne odpovede

Získané body:

Úspešnosť: