IREDUCIBILNOSŤ POLYNÓMOV NAD NIEKTORÝMI POĽAMI

Popis ireducibilných polynómov v $F[x]$ veľmi silne závisí na poli F. Preberieme si teraz situáciu pre najbežnejšie polia.

Nad poľom komplexných čísel $\mathbb{C}$ je otázka ireducibilnosti rozriešená Základnou vetou algebry.

Veta 1. *Polynóm nad $\mathbb{C}$ je ireducibilný práve vtedy, keď má stupeň 1.*

Teda nad $\mathbb{C}$ sa každý polynóm dá rozložiť na súčin polynómov stupňa 1. Avšak nájdenie takého rozkladu závisí na numerickom nájdení komplexných koreňov polynómu.

Pre pole $\mathbb{R}$ reálnych čísel platí nasledujúce tvrdenie.

Veta 2. *Polynóm nad $\mathbb{R}$ je ireducibilný práve vtedy, keď má stupeň 1 alebo má stupeň 2 a záporný diskriminant.*

Pre praktické hľadanie rozkladu nad $\mathbb{R}$ platí to isté, ako pre $\mathbb{C}$: nájdenie takého rozkladu závisí na numerickom nájdení komplexných koreňov polynómu.

Nad poľom $\mathbb{Q}$ racionálnych čísel je situácia komplikovanejšia a neexistuje jednoduchý popis ireducibilných polynómov. Pri zisťovaní ireducibilnosti možno použiť nasledujúce tvrdenia.

Veta 3. *Polynóm s celočíselnými koeficientmi je ireducibilný nad $\mathbb{Q}$ práve vtedy, keď je ireducibilný nad $\mathbb{Z}$.*

Veta 4. (Eisensteinove kritérium) *Nech $f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi. Predpokladajme, že existuje prvočíslo p také, že $p|a_0$, $p|a_1, dots, p|a_{n-1}$, p nedelí a_n, p^2 nedelí a_0. Potom f je ireducibilný nad $\mathbb{Q}$.*

Z Vety 4 vyplýva, že existujú ireducibilné polynómy nad $\mathbb{Q}$ všetkých stupňov. Napríklad polynóm $x_n + 2$ je pre každé $n > 0$ ireducibilný (použijeme $p = 2$). Všimnime si ale, že Eisensteinove kritérium nie je ekvivalencia. Ak neexistuje prvočíslo p spĺňajúce podmienky, polynóm môže ale aj nemusí byť ireducibilný.

Na rozklad polynómov nad $\mathbb{Q}$ existuje efektívny matematický software - napríklad program MAPLE.

Kontrolný test

Začiatok testu (5 bodov) :

1. Polynóm $x^2 + c$ je nad $\mathbb{C}$

☐ reducibilný;

☐ ireducibilný;

☐ závisí to od c.

2. Polynóm $x + c$ je nad polom F

☐ vždy reducibilný;

☐ vždy ireducibilný;

☐ závisí to od c;

☐ závisí to od F.

3. Polynóm $x^4 + 1$ nad $\mathbb{R}$

- ☐ má koreň a je reducibilný;
- ☐ nemá koreň a je ireducibilný;
- ☐ má koreň a je ireducibilný;
- ☐ nemá koreň a je reducibilný.

4. Polynóm $x^n - 6x + 15$ je nad $\mathbb{Q}$

- ☐ reducibilný;
- ☐ ireducibilný;
- ☐ závisí to od n.

5. Polynóm $x^4 + 1$ je nad $\mathbb{Q}$

- ☐ reducibilný;

☐ ireducibilný podľa Eisensteinovho kritéria;

☐ ireducibilný, ale Eisensteinove kritérium sa nedá použiť.

Koniec testu   Správne odpovede

Získané body:

Úspešnosť: